

Министерство образования и науки Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ
ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Методические указания

Тепловое излучение. Элементы теории и примеры решения типовых задач: методические указания к самостоятельной работе / А.А. Фефелов, А.В. Брыков; под ред. Б. И. Колотилина; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2011. 32 с.

Приводятся элементы теории и примеры решения типовых задач по разделу курса физики «Тепловое излучение».

Предназначены для студентов всех специальностей.

Ил. 4. Библиогр.: 5 назв.

Тепловое излучение, энергетическая светимость, испускательная способность, спектральная плотность энергетической светимости, поглощательная способность, абсолютно черное тело, серое тело, объемная плотность энергии, спектральная плотность объемной плотности энергии, закон Кирхгофа, закон Стефана – Больцмана, закон Вина, ультрафиолетовая катастрофа, квантовая гипотеза, формула Планка

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра общей и экспериментальной физики РГРТУ
(зав. кафедрой проф. Б.И. Колотилин)

Тепловое излучение.

Элементы теории и примеры решения типовых задач

Составители: Ф е ф е л о в Андрей Анатольевич
Б р ы к о в Александр Валериевич

Редактор Р.К. Мангутова

Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 25.08.11. Формат бумаги 60 × 84 1/16.

Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,0.

Тираж 200 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Параметры теплового излучения	5
1.1. Энергетическая светимость тела.....	5
1.2. Испускательная способность тела.....	6
1.3. Поглощательная способность тела.....	7
1.4. Равновесная плотность энергии излучения.....	8
2. Закономерности теплового излучения	9
2.1. Закон Кирхгофа.....	9
2.2. Закон Стефана – Больцмана.....	11
2.3. Закон Вина.....	11
3. Проблемы классической физики при объяснении закономерностей теплового излучения. Формула Рэлея – Джинса. «Ультрафиолетовая катастрофа»	12
4. Квантовая гипотеза. Формула Планка	14
5. Примеры решения задач	19
Библиографический список	32

Введение

Из повседневного опыта известно, что все тела независимо от их агрегатного состояния при нагревании до определенной температуры приобретают способность светиться, т.е. излучать электромагнитные (далее ЭМ) волны в видимом диапазоне. Следует заметить, что свечение тел может происходить не только в результате их нагрева. Выделение телом энергии, которая преобразуется в ЭМ излучение, может происходить также [1]:

- 1) за счет химических реакций (например, окисление фосфора на воздухе) – *хемилюминесценция*;
- 2) при воздействии на газы и твердые тела электрического поля – *электролюминесценция*;
- 3) за счет поглощения энергии ЭМ волн, падающих на тело, с последующим их переизлучением – *фотолюминесценция*;
- 4) за счет бомбардировки поверхности твердых тел электронами – *катодолуминесценция*.

Тепловым излучением называется ЭМ излучение, возникающее за счет внутренней энергии излучающего тела и зависящее только от температуры и оптических свойств этого тела.

Одним из свойств ЭМ волн является их способность переносить энергию от одной точки пространства к другой. Поэтому если нагретое тело не восполняет каким-либо образом запас своей внутренней энергии за счет внешних источников, то с течением времени его термодинамическая температура будет уменьшаться, т.е. тело будет остывать. Важно отметить также, что интенсивность теплового излучения зависит от температуры, возрастая с ее увеличением и уменьшаясь при ее понижении.

Заметим, что термин «нагретое тело» надо понимать в том смысле, что тело обладает температурой, отличной от абсолютного нуля. Таким образом, тепловое излучение имеет место при любой температуре $T > 0$.

Тепловое излучение – единственный вид излучения, способный находиться в состоянии термодинамического равновесия с веществом, т.е. в

таком состоянии, когда количество энергии, поглощенное веществом, равно количеству энергии, излученному этим веществом. Действительно, предположим, например, что по каким-то причинам равновесное состояние системы «тело - излучение» нарушено и тело излучает энергии больше, чем поглощает. Тогда запас внутренней энергии тела будет уменьшаться, что приведет к снижению его температуры. Последнее будет означать постепенное уменьшение интенсивности теплового излучения с поверхности тела. Этот процесс будет происходить до тех пор, пока не будет восстановлено равновесное состояние между телом и излучением. Очевидно, что рассуждения аналогичного порядка можно провести и в том случае, когда количество энергии, излучаемое телом, становится меньше энергии, поглощаемой телом.

Поскольку тепловое излучение может находиться в равновесном состоянии, то к нему согласно представлениям классической физики должны быть применимы законы термодинамики, общим закономерностям которой это излучение должно подчиняться.

1. Параметры теплового излучения

1.1. Энергетическая светимость тела

Одним из основных параметров, характеризующих тепловое излучение тела [1], является его *энергетическая светимость* R - количество энергии, излучаемой единицей поверхности тела в единицу времени по всем направлениям (т.е. в пределах телесного угла 2π). Энергетическая светимость является функцией температуры тела, т.е.

$$R = f(T).$$

Как видно из определения, энергетическая светимость измеряется в $[Вт/м^2]$ и по физическому смыслу представляет собой плотность потока энергии излучения.

1.2. Испускательная способность тела

Спектр теплового излучения включает множество спектральных составляющих. Об этом можно догадаться, наблюдая, например, свечение металлов, нагретых до высокой температуры, в частности спиралей ламп накаливания. Такие тела испускают яркий свет, близкий по цвету к белому, который, как известно, не является монохроматическим и представляет собой суперпозицию ЭМ колебаний с различными длинами волн. Опытным путем было установлено, что интенсивность излучения, испускаемого нагретым телом, различна для различных участков спектрального диапазона. В связи с этим естественно ввести в рассмотрение функцию r_ω , описывающую распределение интенсивности теплового излучения по частотам излучаемых волн. Таким образом, функция r_ω характеризует спектральный состав теплового излучения. Величина r_ω называется испускательной способностью тела. В общем случае следует также полагать, что функция r_ω зависит от температуры (на это указывает хотя бы тот факт, что при увеличении температуры нагреваемого тела цвет его свечения меняется от темно-красного до ярко-белого). С учетом этого будем писать обозначение функции испускательной способности в виде $r_{\omega T}$. Очевидно, что R и $r_{\omega T}$ связаны соотношением

$$R = \int_0^{\infty} r_{\omega T} d\omega. \quad (1)$$

Анализируя (1), можно заметить, что величина $r_{\omega T}$ имеет смысл функции плотности распределения величины R по излучаемым телом частотам ω . Поэтому для $r_{\omega T}$ существует и другое название: $r_{\omega T}$ есть спектральная плотность энергетической светимости тела.

Отметим, что частота ω и длина волны света в вакууме связаны соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Тогда

$$d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega.$$

Диапазону частот $d\omega$ можно поставить в соответствие диапазон длин волн $d\lambda$. Поскольку интервалы $d\omega$ и $d\lambda$ относятся к одному и тому же участку спектра, величины $dR_\omega = r_{\omega T} d\omega$ и $dR_\lambda = r_{\lambda T} d\lambda$ должны быть равны, так что

$$r_{\omega T} d\omega = r_{\lambda T} d\lambda = r_{\lambda T} \frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega = r_{\lambda T} \frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega,$$

или

$$r_{\omega T} = r_{\lambda T} \frac{\lambda^2}{2\pi c} = r_{\lambda T} \frac{2\pi c}{\omega^2}. \quad (2)$$

С помощью (4) можно перейти от $r_{\omega T}$ к $r_{\lambda T}$ и наоборот.

1.3. Поглощательная способность

Пусть на элементарную площадку dS тела падает поток энергии ЭМ излучения в диапазоне частот $d\omega$ [1]. Обозначим этот поток через $d\Phi_\omega$. Часть этого потока будет отражена телом, другая часть поглотится. Обозначим поток энергии, поглощенный элементом поверхности тела, через $d\Phi'_\omega$. Величина

$$a_{\omega T} = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega} \quad (3)$$

называется поглощательной способностью тела. Эта величина, как и $r_{\omega T}$, является функцией частоты и температуры. Из (3) видно, что $a_{\omega T} \leq 1$. Если тело обладает такими свойствами, что во всем диапазоне частот $a_{\omega T} = a \equiv 1$, то такое тело называется абсолютно черным. Если $a < 1$, тело называют серым. Можно показать, что энергетическая светимость R серого непрозрачного тела связана с энергетической светимостью R^* абсолютно черного тела соотношением [2]

$$R = a \cdot R^*.$$

Аналогично

$$r_{\omega T} = a \cdot r_{\omega T}^*,$$

где $r_{\omega T}^*$ - спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела.

1.4. Равновесная плотность энергии излучения

Рассмотрим замкнутую теплоизолированную полость, стенки которой поддерживаются при постоянной температуре T [1]. Вследствие теплового излучения с внутренней поверхности полости ее объем окажется заполненным ЭМ волнами, пересекающими объем полости во всевозможных направлениях. Эти волны непрерывно поглощаются и вновь излучаются стенками полости. Суперпозиция этих волн приводит к заполнению всего объема полости ЭМ полем, энергия которого распределена по полости с некоторой постоянной, зависящей от температуры, плотностью $u(T)$. При этом между стенками полости и ЭМ излучением, локализованным в объеме полости, устанавливается состояние термодинамического равновесия, при котором количество ЭМ энергии, излучаемой в единицу времени любым участком поверхности, равно количеству энергии, поглощаемому за то же время этим же участком.

Величина $u(T)$ зависит только от температуры стенок полости и не зависит от материала, из которого они изготовлены. Действительно, представим себе две полости, изготовленные из разных материалов, но имеющие одинаковую температуру. Предположим, что $u(T)$ зависит от материала стенок. Тогда объемная плотность энергии ЭМ излучения в первой полости будет $u_1(T)$, а во второй - $u_2(T)$, причем $u_1 > u_2$. Соединим эти полости и обеспечим им возможность обмениваться излучением. Очевидно, что вследствие того что $u_1 > u_2$, поток энергии из полости 1 в полость 2 будет больше, чем из полости 2 в полость 1. Тогда равновесное со-

стояние в полостях 1 и 2 будет нарушено: полость 1 будет в единицу времени терять энергии больше, чем поглощать, и, следовательно, будет остывать, а полость 2 по аналогичным соображениям должна будет нагреваться. Однако такой процесс противоречит второму началу термодинамики, т.е. предположение о зависимости $u(T)$ от материала стенок было неверным.

При данной температуре равновесная объемная плотность энергии ЭМ излучения имеет определенное спектральное распределение. Объемная спектральная плотность энергии $u(\omega, T)$ связана с объемной плотностью $u(T)$ соотношением

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega. \quad (4)$$

Равновесная плотность энергии теплового излучения «черного тела» u^* и энергетическая светимость абсолютно черного тела R^* связаны между собой соотношением

$$R^* = \frac{c}{4} u^*, \quad (5)$$

где c - скорость света.

2. Закономерности теплового излучения

2.1. Закон Кирхгофа

Между испускательной и поглощательной способностью тела имеет-

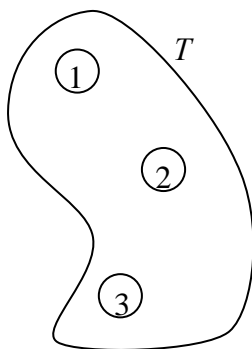


Рис. 1

ся связь. Рассмотрим систему тел, изолированную от внешней среды замкнутой оболочкой, поддерживаемой при постоянной температуре T (см. рис. 1) [1]. Из внутренней полости оболочки откачан воздух, так что тела 1, 2 и 3 могут обмениваться между собой и оболочкой энергией только посредством ЭМ излучения.

Опыт показывает, что в такой системе между телами и излучением через некоторое время устанавливается состояние термодинамического равновесия, характеризующееся одинаковой температурой всех тел системы, равной температуре T оболочки. Итак, температура всех тел стала одинаковой и равной T . Однако испускательные $r_{\omega T}$ и поглощательные $a_{\omega T}$ способности тел могут быть различными. Предположим, что элементарная площадка dS тела 1 в диапазоне частот $d\omega$ характеризуется испускательной способностью $r_{\omega T1} > r_{\omega T2} > r_{\omega T3}$. Тогда тело 1 в рассматриваемом диапазоне частот $d\omega$ испускает энергии больше, чем тело 2 или 3. Поскольку, однако, температуры и внутренние энергии тел остаются неизменными, тело 1 должно в данном диапазоне частот больше энергии и поглощать, то есть должно быть справедливо соотношение $a_{\omega T1} > a_{\omega T2} > a_{\omega T3}$. Кирхгофу в 1859 г. удалось установить, что

отношение испускательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела и является для всех тел одной и той же универсальной функцией частоты (или длины волны) и температуры:

$$\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} = f(\omega, T). \quad (6)$$

Из соотношения (4), в частности, следует, что

$$\left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} \right)_1 = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} \right)_2 = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} \right)_3.$$

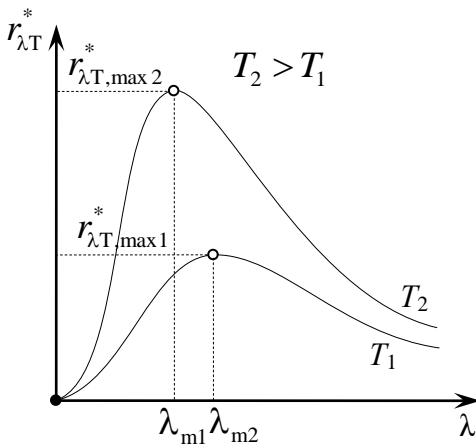


Рис. 2

Заметим, что для абсолютно черного тела $a_{\omega T} \equiv 1$. Следовательно, функция Кирхгофа $f(\omega, T)$ есть не что иное, как функция $r_{\omega T}^*$ испускательной способности абсолютно черного тела.

Воспользовавшись связью ω и λ , перейдем от $f(\omega, T)$ к $\phi(\lambda, T)$:

$$f(\omega, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \varphi(\lambda, T).$$

Зависимость $\varphi(\lambda, T) = r_{\lambda T}^*$ для двух различных температур представлена на рис. 2. Как видно из рис. 2, максимум функции $r_{\lambda T}^*$ с увеличением температуры смещается в сторону более коротких волн.

График функции спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела $r_{\lambda T}^*$, представленной на рис. 2, был построен по экспериментальным данным. Попытки установить вид функции $r_{\lambda T}^*$, принятые физиками, долгое время не давали результата. Вместе с тем в ходе теоретических и экспериментальных исследований особенностей теплового излучения тел были установлены следующие важные закономерности.

2.2. Закон Стефана – Больцмана

В 1879 г. Стефан, экспериментируя с серыми телами, установил, что энергетическая светимость любого тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры:

$$R \propto T^4.$$

Несколько позже, в 1884 г. Больцман, используя методы термодинамики, уточнил полученное Стефаном соотношение, показав теоретически, что для *абсолютно черного тела*

$$R^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4, \quad (7)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – постоянная, получившая название постоянной Стефана – Больцмана. Соотношение (7) носит название закона Стефана – Больцмана.

2.3. Закон Вина

Вин, проводя теоретические исследования с целью установить вид функции $f(\omega, T)$, показал, что эта функция должна иметь вид [1]

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right).$$

При этом для функции $r^*(\lambda, T)$ согласно (4) получаем соотношение

$$r^*(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right),$$

или

$$r^*(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} \psi(\lambda T).$$

Продифференцировав $r^*(\lambda, T)$ по λ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} [r^*(\lambda, T)] &= -5 \frac{1}{\lambda^6} \psi(\lambda T) + \frac{1}{\lambda^5} \frac{d}{d\lambda} [\psi(\lambda T)] T = \\ &= \frac{1}{\lambda^6} [\lambda T \psi'(\lambda T) - 5\psi(\lambda T)]. \end{aligned}$$

Приравняв последнее соотношение к нулю при $\lambda = \lambda_m$, получим

$$\lambda_m T \psi'(\lambda_m T) = 5\psi(\lambda_m T). \quad (8)$$

Из (8) следует, что

$$\lambda_m T = C_1 = \text{const}. \quad (9)$$

Соотношение (9) носит название закона смещения Вина или первого закона Вина. Константа $C_1 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ называется постоянной Вина. Полученное Вином соотношение объясняет смещение максимума спектральной плотности энергетической светимости при изменении температуры тела, показанное на рис. 2.

Заметим, что из соотношения

$$r^*(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} \psi(\lambda T)$$

и формулы (9) следует, что [2]

$$r_{\max}^*(\lambda, T) = (T/b)^5 \psi(\lambda_m T) = C_2 T^5, \quad (10)$$

где $C_2 = 1,29 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$.

Соотношение (10) носит название второго закона Вина.

3. Проблемы классической физики при объяснении закономерностей теплового излучения. Формула Рэля – Джинса. «Ультрафиолетовая катастрофа»

В 1900 г. попытку получить аналитический вид функции Кирхгофа предпринял Рэлей. В отличие от предшественников он подошел к этому вопросу с позиций статистической физики [2], рассмотрев равновесное излучение в замкнутой полости с зеркальными стенками как совокупность стоячих ЭМ волн различных частот. Рэлей показал, что число dn ЭМ колебаний с собственными частотами в диапазоне от ω до $\omega + d\omega$, заключенных в объеме V полости, должно удовлетворять соотношению

$$dn \propto V\omega^2 d\omega.$$

Колебания с разными собственными частотами ω совершаются независимо друг от друга. При этом каждой собственной частоте соответствует своя колебательная степень свободы. Применив к такой системе в виде совокупности ЭМ волн теорему классической статистики о равномерном распределении энергии по степеням свободы, согласно которой на каждую степень свободы системы должна приходиться энергия, равная $(1/2)kT$, Рэлей получил соотношение

$$dW \propto dn \cdot kT = V\omega^2 d\omega kT,$$

откуда

$$u(\omega, T) \propto \frac{dW}{Vd\omega} = \omega^2 kT$$

или

$$r^*(\omega, T) = f(\omega, T) \propto \frac{c}{4} kT \cdot \omega^2.$$

В дальнейшем Рэлей и Джинс уточнили это соотношение, получив для функции Кирхгофа формулу

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT. \quad (11)$$

Данная формула получила название формулы Рэля – Джинса.

Нетрудно видеть, что соотношение (11) удовлетворяет закону смещения Вина. Действительно, (11) можно привести к виду

$$r^*(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2 kT = \frac{(2\pi c)^3}{\lambda^4} kT = \frac{1}{\lambda^5} \Psi(\lambda T),$$

аналогичному тому, что получил Вин. Проведя дифференцирование, придем в итоге к формуле Вина.

Однако сравнение зависимости $f(\lambda, T)$, построенной на основе (11), с графиком, построенным по экспериментальным данным (см. рис. 3), по-

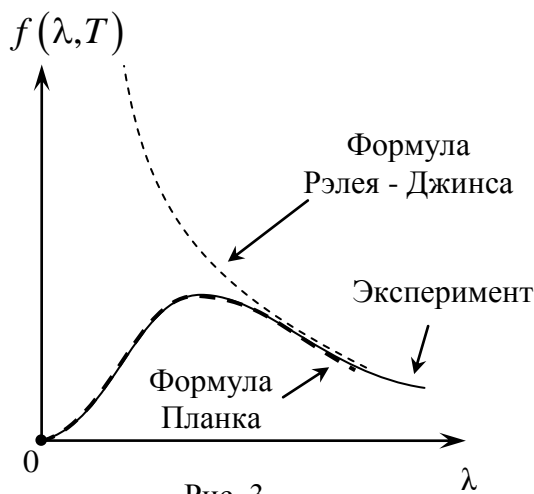


Рис. 3

казывает, что формула Рэлея – Джинса удовлетворительно описывает закономерности излучения абсолютно черного тела лишь в длинноволновой части спектра (т.е. в области низких частот). В области коротких волн наблюдалось существенное расхождение в данных, даваемых теорией и экспериментом.

Кроме того, согласно рассмотренному ранее, интеграл от функции (11) должен давать значение энергетической светимости тела R^* при данной температуре, которая, очевидно, должна быть величиной конечной. Но интеграл

$$\frac{kT}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty \omega^2 d\omega = \infty,$$

что противоречит здравому смыслу. Полученный результат известен в истории физики как «ультрафиолетовая катастрофа».

Рэлей и Джинс при выводе соотношения (11) использовали методы статистической физики, в частности теорему классической статистики о равнораспределении энергии по степеням свободы. Полученные ими результаты находились в строгом соответствии с представлениями физики того времени, поэтому столь очевидные расхождения теории с эксперимен-

том свидетельствовали о неверном понимании механизмов и законов теплового излучения.

4. Квантовая гипотеза. Формула Планка

В 1899 – 1900 гг. немецкому физику Макс Планку удалось установить вид функции Кирхгофа, точно согласующийся с законами Стефана - Больцмана, Вина и опытными данными. Планк рассмотрел термодинамическую систему, состоящую из стенок полости, находящихся при температуре T , и заключенного в объеме полости ЭМ излучения [1]. Излучение стенок полости Планк представил в виде совокупности ЭМ волн, испускаемых отдельными атомами, причем для описания механизма излучения атомом ЭМ волн Планк выбрал наиболее простую модель атома, представив его в виде колеблющегося диполя, т.е. линейного гармонического осциллятора. Совокупность таких осцилляторов испускает ЭМ волны на всевозможных частотах ω , соответствующих собственным частотам колебаний атомов. Рассмотрев такую систему в состоянии термодинамического равновесия и учтя, что объемная плотность энергии излучения не зависит от материала стенок полости, а определяется только их температурой, Планк получил в 1899 г. соотношение для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела (функции Кирхгофа) в виде

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \langle \epsilon_\omega \rangle, \quad (12)$$

где $\langle \epsilon_\omega \rangle$ - средняя энергия осциллятора с собственной частотой ω . Заметим, что соотношение (12) по виду близко к формуле Рэлея – Джинса (11).

Подбирая вид выражения для $\langle \epsilon_\omega \rangle$, Планк сделал революционное предположение, заключающееся в том, что

энергия колеблющихся атомов-диполей может изменяться не непрерывно, а дискретно, т.е. порциями, пропорциональными некоторой элементарной величине – кванту энергии колебаний ϵ_0 .

Данное предположение известно в истории физики как квантовая гипотеза.

Итак, ЭМ излучение испускается порциями. Из сделанного Планком предположения вытекало, что энергия осциллятора должна быть кратна элементарной порции энергии ε_0 , т.е. $\varepsilon_\omega = \varepsilon_n = n\varepsilon_0$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. В состоянии термодинамического равновесия значения энергий гармонических осцилляторов должны подчиняться статистике Больцмана:

$$P_n = C \exp\left(-\frac{n\varepsilon_0}{kT}\right), \quad (13)$$

где P_n - вероятность того, что данный осциллятор, произвольно выбранный из всей совокупности N гармонических осцилляторов, будет иметь значение энергии, равное ε_n ; C - коэффициент, определяемый из условия нормировки:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1,$$

Откуда

$$C = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\varepsilon_0}{kT}\right)}. \quad (14)$$

Подставив (14) в (13), найдем

$$P_n = \frac{\exp\left(-\frac{n\varepsilon_0}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\varepsilon_0}{kT}\right)}. \quad (15)$$

Средняя энергия гармонического осциллятора с собственной частотой $\langle \varepsilon_\omega \rangle$ равна

$$\langle \varepsilon_\omega \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_\omega P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{n \varepsilon_0}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n \varepsilon_0}{kT}\right)}. \quad (16)$$

Введем обозначение $x = \varepsilon_0/kT$, тогда

$$\langle \varepsilon_\omega \rangle = \varepsilon_0 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-nx)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx)} = \left| f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) \right| = \varepsilon_0 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n f(x)}{\sum_{n=0}^{\infty} f(x)} = \varepsilon_0 \frac{d}{dx} \ln[f(x)].$$

Сумма $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx)$ есть бесконечная убывающая геометрическая

прогрессия с множителем $q = e^{-x}$ и первым членом, равным 1. Сумма первых N членов этой прогрессии равна (см., например, вывод формулы для интенсивности I_ϕ дифракционной решетки)

$$S_N = \frac{q^N - 1}{q - 1} = \frac{e^{-Nx} - 1}{e^{-x} - 1},$$

откуда при $N = \infty$ получаем

$$S_\infty = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

С учетом полученного можно записать, что

$$\langle \varepsilon_\omega \rangle = \varepsilon_0 \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{1}{1 - e^{-x}} \right) = \varepsilon_0 (1 - e^{-x}) \left[-\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right] = \frac{\varepsilon_0}{e^x - 1} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}, \quad (17)$$

В итоге, подставляя (17) в (12), для испускательной способности абсолютно черного тела получаем следующее выражение:

$$f(\omega, T) = r^*(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \langle \varepsilon_\omega \rangle = \frac{\omega^2}{2\pi c^2} \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}. \quad (18)$$

Как было отмечено выше, Вин, пытаясь найти вид функции Кирхгофа, получил для нее соотношение

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right). \quad (19)$$

Из сопоставления (19) и (18) видно, что квант энергии ЭМ колебаний должен быть пропорционален частоте ω , т.е.

$$\varepsilon_0 = \hbar\omega = h\nu. \quad (20)$$

Постоянная $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с называется постоянной Планка. С учетом (20) для функции Кирхгофа окончательно получаем соотношение

$$r^*(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (21)$$

Соотношение (21) носит название формулы Планка.

Формула Планка полностью согласуется с экспериментальными данными (см. рис. 3). Путем соответствующих математических преобразований из (21) могут быть получены законы Стефана - Больцмана и Вина. Действительно, интегрирование соотношения (21) по частотам в пределах от 0 до ∞ дает

$$\begin{aligned} R^* &= \int_0^\infty r^*(\omega, T) d\omega = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega = \\ &= \left| x = \frac{\hbar\omega}{kT}, d\omega = \frac{kT}{\hbar} dx \right| = \frac{(kT)^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{k^4 \pi^2}{60 c^2 \hbar^3} T^4 = \sigma T^4. \end{aligned}$$

Поиск экстремума функции Планка $r^*(\lambda, T)$ [при этом следует помнить,

что $r^*(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} r^*(\omega, T)$]

$$\frac{d}{d\lambda} [r^*(\lambda, T)]_{\lambda=\lambda_m} = 0$$

после соответствующих преобразований приводит к закону смещения Вина.

Заметим также, что при малых частотах, когда $\hbar\omega \ll kT$, из (19) следует

$$r^*(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \left| e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT} \right| = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT} - 1} = \frac{\omega^2}{4\pi^2c^2} kT,$$

т.е. получаем формулу Рэля – Джинса.

Отметим, что из сопоставления (1), (4), (5) и (21) следует, что

$$u^*(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (22)$$

5. Примеры решения задач

Задача № 1

Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке $d = 0,3$ мм, длина спирали $l = 5$ см [3]. При включении лампочки в сеть напряжением $U = 127$ В через лампочку течет ток $I = 0,31$ А. Найти температуру спирали. Считать, что всё выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетических светимостей вольфрама и абсолютно черного тела для данной температуры $a = 0,31$.

Решение

Вольфрамовая спираль излучает как серое тело, мощность излучения

$$P' = R'_s S,$$

где по закону Стефана - Больцмана $R'_s = a\sigma T^4$ - энергетическая светимость серого тела, $S = 2\pi d \cdot l$ - площадь поверхности вольфрамовой спирали.

С учетом последних соотношений для мощности излучения спирали можем записать

$$P' = 2\pi a \sigma T^4 d \cdot l.$$

С другой стороны, мощность тока $P' = UI$, тогда $UI = 2\pi a \sigma T^4 d \cdot l$, откуда температура спирали:

$$T = \left(\frac{UI}{2\pi a \sigma d \cdot l} \right)^{1/4}.$$

$$\text{Ответ: } T = \left(\frac{UI}{2\pi a \sigma d \cdot l} \right)^{1/4} = 2208 \text{ K}.$$

Задача № 2

Найти солнечную постоянную K , то есть количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к солнечным лучам и находящуюся на таком же расстоянии от него, как и Земля. Температура поверхности Солнца $T = 5800 \text{ K}$. Солнце считать абсолютно черным телом.

Решение

Энергетическая светимость Солнца по закону Стефана - Больцмана есть $R_{\odot} = \sigma T^4$. Мощность излучения Солнца: $P = R_{\odot} S_1$, где $S_1 = 4\pi R_{\odot}^2$ – площадь его поверхности. С учетом первого выражения получаем $P = 4\pi \sigma T^4 R_{\odot}^2$. Эта мощность падает на внутреннюю поверхность сферы, радиус которой равен среднему расстоянию от Солнца до Земли ($R_3 = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ м}$). Площадь поверхности этой сферы $S_2 = 4\pi R_3^2$.

По определению солнечная постоянная - это плотность потока излучения сквозь поверхность этой сферы: $K = P/S_2$. Окончательно получаем

$$K = \frac{\sigma T^4 R_{\odot}^2}{R_3^2}.$$

Ответ: $K = \frac{\sigma T^4 R_c^2}{R_3^2} = 1,38 \text{ кВт/м}^2$.

Задача № 3

Температура абсолютно черного тела изменилась при нагревании от $T_1 = 1000 \text{ K}$ до $T_2 = 3000 \text{ K}$ [4]. Во сколько раз увеличилась энергетическая светимость $R_\text{э}$? На сколько изменилась длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости? Во сколько раз увеличилась максимальная спектральная плотность энергетической светимости $r_{\text{э макс}}$ тела?

Решение

Из первого закона Вина $\lambda_{\text{макс}} T = C$ имеем

$$\lambda_1 T_1 = C_1 \text{ и } \lambda_2 T_2 = C_1.$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем

$$\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2 \text{ или } \frac{T_1}{T_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

По закону Стефана - Больцмана для абсолютно черного тела энергетическая светимость равна $R_\text{э} = \sigma T^4$. Отсюда получаем

$$\frac{R_{\text{э1}}}{R_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4.$$

Подставляя известные величины температур, имеем

$$\frac{R_{\text{э2}}}{R_{\text{э1}}} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^4 = 81.$$

Из первого закона Вина — $\lambda_1 = C_1/T_1 = 2,9$ мкм и $\lambda_2 = C_1/T_2 = 0,97$ мкм. Изменение длины волны: $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 1,93$ мкм. Согласно второму закону Вина максимальная спектральная плотность энергетической светимости $r_{\lambda, \text{ макс}} = C_2 T^5$, где $C_2 = 1,29 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м³ · К⁵).

Тогда

$$r_1 = C_2 T_1^5 \text{ и } r_2 = C_2 T_2^5$$

и

$$\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^5 = 243.$$

Ответ: $\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^5 = 243.$

Задача № 4

Поверхность тела нагрета до температуры $T = 1000$ К [5]. Одна половина этой поверхности нагревается на $\Delta T = 100$ К, другая охлаждается на $\Delta T = 100$ К. Во сколько раз изменяется энергетическая светимость R_{λ} поверхности этого тела?

Решение

По закону Стефана - Больцмана для серого тела $R'_{\lambda} = a\sigma T^4$. После нагревания и охлаждения энергетическая светимость первой и второй половин будет соответственно равна

$$R'_{\lambda 1} = a\sigma (T + \Delta T)^4 \text{ и } R'_{\lambda 2} = a\sigma (T - \Delta T)^4.$$

Средняя энергетическая светимость станет равной

$$\langle R'_{\lambda} \rangle = \frac{R'_{\lambda 1} + R'_{\lambda 2}}{2}.$$

Подставляя предыдущие выражения, получаем

$$\langle R'_\odot \rangle = \frac{a\sigma \left[(T + \Delta T)^4 + (T - \Delta T)^4 \right]}{2}.$$

Отсюда найдем изменение энергетической светимости тела:

$$\frac{\langle R'_\odot \rangle}{R'_\odot} = \frac{(T + \Delta T)^4 + (T - \Delta T)^4}{2T^4} = 1,06.$$

Ответ: $\frac{\langle R'_\odot \rangle}{R'_\odot} = \frac{(T + \Delta T)^4 + (T - \Delta T)^4}{2T^4} = 1,06.$

Задача № 5

На сколько уменьшится масса Солнца за год вследствие излучения? За какое время $\Delta \tau_1$ масса Солнца уменьшится вдвое? Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К [3].

Решение

Мощность, излучаемая Солнцем, равна

$$P = R_\odot S,$$

где R_\odot - энергетическая светимость Солнца; $S = 4\pi R_c^2$ - площадь его поверхности; $R_c = 6,96 \cdot 10^8$ м – радиус Солнца.

По закону Стефана - Больцмана

$$R_\odot = \sigma T^4,$$

тогда мощность излучения

$$P = 4\pi R_c^2 \sigma T^4.$$

Изменение энергии Солнца за счет излучения

$$\Delta W = P \Delta \tau.$$

С другой стороны,

$$\Delta W = c^2 \Delta m,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с - скорость света; Δm - изменение массы Солнца.

Приравнивая правые части последних двух выражений, получаем

$$P \Delta \tau = c^2 \Delta m,$$

откуда изменение массы Солнца

$$\Delta m = P \Delta \tau / c^2.$$

Подставляя мощность излучения Солнца, получаем

$$\Delta m = \frac{4\pi R_c^2 \sigma T^4 \Delta \tau}{c^2} = 1,37 \cdot 10^{17} \text{ кг.}$$

Если $\Delta m = (1/2)M_c$, где $M_c = 1,989 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца, то

$$\Delta \tau_1 = \frac{M_c c^2}{8\pi R_c^2 \sigma T^4} = 7,06 \cdot 10^{12} \text{ лет.}$$

$$\text{Ответ: } \Delta m = \frac{4\pi R_c^2 \sigma T^4 \Delta \tau}{c^2} = 1,37 \cdot 10^{17} \text{ кг; } \Delta \tau_1 = \frac{M_c c^2}{8\pi R_c^2 \sigma T^4} = 7,06 \cdot 10^{12}$$

лет.

Задача № 6

Медный шарик диаметром $d = 1,2$ см поместили в откачанный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика $T_0 = 300$ К. Считая поверхность шарика

абсолютно черной, найти, через какое время его температура уменьшится в $\eta = 2$ раза [4].

Решение

По закону Стефана - Больцмана энергетическая светимость шарика как абсолютно черного тела равна

$$R_{\text{ш}} = \sigma T^4.$$

Возьмем малый интервал времени dt , в течение которого температура изменяется на малую величину dT , так что можно считать температуру шарика в этом интервале постоянной и равной T . Энергия, теряемая шариком за это время, определяется соотношением

$$dW = S_{\text{ш}} R_{\text{ш}} dt,$$

где $S_{\text{ш}} = 4\pi(d/2)^2$ - площадь поверхности шарика. Тогда

$$dW = \pi d^2 \sigma T^4 dt. \quad (23)$$

С другой стороны, температура шарика уменьшается на dT и из термодинамических соображений потеря энергии шарика за счет уменьшения температуры будет выражаться через теплоемкость вещества, из которого изготовлен шарик, следующим образом:

$$dW = -mcdT, \quad (24)$$

где c - теплоемкость материала шарика, $m = \rho \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3$ - масса шарика, ρ - плотность материала шарика.

Подставляя выражения для c и m в (24), получаем

$$dW = -\frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{8} \rho c dT = -\frac{\pi}{6} d^3 \rho c dT. \quad (25)$$

Приравнивая правые части (23) и (25) выражений и выражая dt , получаем

$$dt = -\frac{c\rho d}{6\sigma} \frac{dT}{T^4}.$$

Интегрируя последнее соотношение слева по t от 0 до t_0 , справа по T от T_0 до T_0/η , получаем

$$\int_0^{t_0} dt = -\frac{c\rho d}{6\sigma} \int_{T_0}^{T_0/\eta} \frac{dT}{T^4} = \frac{c\rho d}{18\sigma T_0^3} (\eta^3 - 1).$$

Подставляя числовые данные [$c_{Cu} = 0,39$ Дж/(г·К), $\rho_{Cu} = 8,9$ г/см³], получаем

$$t_0 = \frac{c\rho d}{18\sigma T_0^3} (\eta^3 - 1) = 2,94 \text{ часа.}$$

Ответ: $t_0 = \frac{c\rho d}{18\sigma T_0^3} (\eta^3 - 1) = 2,94 \text{ часа.}$

Задача № 8

Полость объемом $V = 1$ л заполнена тепловым излучением при $T = 1000$ К. Найти: а) теплоемкость C_V ; б) энтропию S этого излучения [4].

Решение

Суммарная внутренняя энергия излучения

$$U = \frac{4}{c} R_\nu V,$$

где $R_\nu = \sigma T^4$ - спектральная плотность потока излучения абсолютно черного тела. С учетом последнего

$$U = \frac{4}{c} \sigma T^4 V.$$

Молярная теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{16\sigma}{c} T^3 V.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$C_V = 3,02 \cdot 10^{-9} \text{ Дж/К}.$$

Первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

С учетом связи

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

перепишем это соотношение в виде

$$TdS = dU + pdV.$$

Так как $p = u/3$ и $u = \frac{4}{c}\sigma T^4$, то

$$TdS = \frac{16}{c}\sigma VT^3 dT + \frac{4}{3c}\sigma T^4 dV.$$

Энтропия будет равна:

$$\int dS = \frac{16}{c}\sigma V \int T^3 dT + \frac{4}{3c}\sigma T^4 \int dV = \frac{16}{3c}\sigma VT^3 + \frac{4}{3c}\sigma T^4 V = \frac{5}{12}C_V.$$

С учетом данных задачи получим $S = 1,26 \cdot 10^{-9} \text{ Дж/К}$.

Ответ: $C_V = \frac{16\sigma}{c} T^3 V = 3,02 \cdot 10^{-9} \text{ Дж/К}$; $S = \frac{5}{12} C_V = 1,26 \cdot 10^{-9} \text{ Дж/К}$.

Задача № 9

Найти с помощью формулы Планка мощность излучения единицы поверхности абсолютно черного тела, приходящуюся на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ нм вблизи максимума спектральной плотности излучения при температуре тела $T = 3000$ К [5].

Решение

По формуле Планка объемная спектральная плотность равновесного излучения u_ω , то есть энергия излучения, отнесенная к единице объема и к единичному интервалу частоты, определяется выражением

$$u_\omega d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} d\omega.$$

Перейдем к обычной частоте: $u_\omega d\omega = \tilde{u}_\nu d\nu$ ($\omega = 2\pi\nu$). Тогда

$$\tilde{u}_\nu = \frac{2\pi\hbar(2\pi\nu)^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar\nu}{kT}} - 1} = \frac{16\pi^2\hbar\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar\nu}{kT}} - 1}.$$

Спектральная плотность в зависимости от длины волны излучения

$$-u(\lambda, T) d\lambda = u_\omega d\omega,$$

где $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. Тогда $d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda$ и можно записать

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} u\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} u_\omega.$$

Подставим объемную спектральную плотность равновесного излучения в последнее выражение:

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1} = \frac{16\pi^2 c \hbar}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1}.$$

Мощность излучения единицы площади поверхности абсолютно черного тела

$$P = \frac{c}{4} u,$$

тогда

$$\Delta P = \frac{c}{4} u(\lambda, T) \Delta \lambda = \frac{4\pi^2 c^2 \hbar}{\lambda_m^5} \frac{\Delta \lambda}{e^{\frac{2\pi c \hbar}{\lambda_m k T}} - 1}.$$

По первому закону Вина

$$\lambda_m T = b,$$

тогда мощность равновесного излучения

$$\Delta P = \frac{4\pi^2 c^2 \hbar}{\lambda_m^5} \frac{\Delta \lambda}{e^{\frac{2\pi c \hbar}{kb}} - 1}.$$

С учетом данных задачи получим

$$\Delta P = 0,312 \text{ Вт/см}^2.$$

Ответ: $\Delta P = \frac{4\pi^2 c^2 \hbar}{\lambda_m^5} \frac{\Delta \lambda}{e^{\frac{2\pi c \hbar}{kb}} - 1} = 0,312 \text{ Вт/см}^2.$

Задача № 10

Температура поверхности Солнца $T_0 = 5500 \text{ К}$. Считая, что поглощательная способность Солнца и Земли равна единице и что Земля находится в состоянии теплового равновесия, найти ее температуру [3].

Решение

Будем рассматривать Землю и Солнце как абсолютно черные тела. Тогда мощность, излучаемая Солнцем, будет равна:

$$P = 4\pi R_0^2 R_{\text{с0}} = 4\pi\sigma R_0^2 T_0^4,$$

где $R_{\text{с0}}$ - светимость Солнца; R_0 - его радиус.

Поток энергии излучения Солнца, приходящийся на единицу телесного угла,

$$I = \frac{dP}{d\Omega} = \frac{P}{4\pi} = \sigma R_0^2 T_0^4.$$

Часть потока энергии, попадающая на Землю и поглощаемая ею, определяется следующим телесным углом:

$$\Delta\Omega = \frac{\pi R^2}{r^2},$$

где R - радиус Земли; r - расстояние от Солнца до Земли. Тогда мощность излучения Солнца, поглощаемая Землей, будет равна:

$$P' = I\Delta\Omega = \frac{\pi\sigma R^2 R_0^2 T_0^4}{r^2}.$$

Мощность, излучаемая Землей, $P'' = 4\pi R^2 R_{\text{з}} = 4\pi\sigma R^2 T^4$, где $R_{\text{з}}$ - светимость Земли; T - температура поверхности Земли.

Приравнивая мощность поглощенную и мощность, излучаемую Землей при условии теплового равновесия, получаем

$$T = T_0 = \sqrt{\frac{R_0}{2r}} = 266 \text{ K}.$$

Ответ: $T = T_0 = \sqrt{\frac{R_0}{2r}} = 266 \text{ K}.$

Задача № 11

Найти уравнение адиабатического процесса (в переменных V и T), проводимого с тепловым излучением, имея в виду, что между давлением и плотностью энергии теплового излучения существует связь: $p = u/3$ [5].

Решение

Учитывая связь объемной плотности излучения с энергетической светимостью абсолютно черного тела - $R_\gamma = cu/4$ и закон Стефана - Больцмана - $R_\gamma = \sigma T^4$, находим энергию излучения полости:

$$U = uV = 4\sigma VT^4/c, \quad (26)$$

где u - плотность энергии излучения; V - объем полости; T - температура стенок полости.

Первое начало термодинамики для адиабатного процесса имеет вид

$$dU + pdV = 0, \quad (27)$$

где p - давление излучения; dV - приращение объема полости.

Исходя из условия задачи, получаем

$$p = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma T^4}{3c}. \quad (28)$$

С учетом (28) соотношение (27) можно переписать в виде

$$d(VT^4) + \frac{1}{3}T^4 dV = 0.$$

Разделим на (VT^4) , получим следующее:

$$3\left(\frac{dT}{T}\right) + \left(\frac{dV}{V}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$d[\ln(VT^3)] = 0, \text{ то есть } VT^3 = \text{const}.$$

Ответ: $VT^3 = \text{const}$.

Задача № 12

Принимая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, вычислить его энергетическую светимость R_s^* и температуру его поверхности. Солнечный диск виден с Земли под углом $\theta = 32'$. Солнечная постоянная (величина, равная поверхностной плотности потока энергии излучения Солнца вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца) $C = 1,4 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ [3].

Решение

Сначала выполним рисунок.

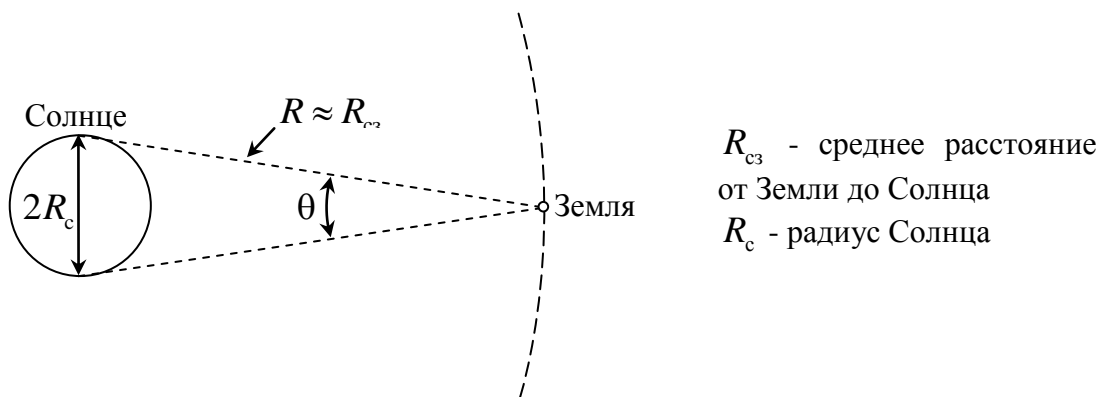


Рис. 4

Из рисунка видно, что

$$2R_c = R_{сз} \theta,$$

или

$$\frac{R_c}{R_{сз}} = \frac{\theta}{2}. \quad (29)$$

Поток энергии ЭМ излучения, испускаемой поверхностью Солнца,

$$\Phi = 4\pi R_c^2 R_\odot^* . \quad (30)$$

Так как на пути движения потока энергии ЭМ излучения от Солнца к Земле потери энергии отсутствуют, то через воображаемую сферическую поверхность радиусом R_{c3} также должен проходить поток энергии, определяемый соотношением (30). В то же время, с учетом понятия «солнечная постоянная», этот поток может быть представлен в виде

$$\Phi = 4\pi R_{c3}^2 C . \quad (31)$$

Приравнивая правые части (30) и (31), после преобразований получаем

$$R_\odot^* = \frac{C}{(R_c/R_{c3})^2} = \frac{4C}{\theta^2} .$$

Теперь, воспользовавшись законом Стефана – Больцмана, получим

$$T = \sqrt[4]{\frac{4C}{\sigma\theta^2}} .$$

Подставляя числовые данные, получаем: $R_\odot^* = 64,7 \text{ МВт/м}^2$, $T = 5800 \text{ К}$.

Ответ: $R_\odot^* = 64,7 \text{ МВт/м}^2$, $T = 5800 \text{ К}$.

Библиографический список

1. Савельев И.В. Курс общей физики: учеб. пособие. В 3-х т. Т. 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с.: ил.

2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2001. – 718 с.: ил.

3. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике: учеб. пособие для вузов. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2005. – 640 с.

4. Кириллов В.М., Давыдов В.А., Задерновский А.А. и др. Решение задач по физике: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2006. – 248 с.

5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 416 с., ил.